Hertentamen Analyse
Donderdag 09/02/12, 14.00–17.00 uur

(1) Laat $A \subset \mathbb{R}$ samenhangend zijn en laat de functie $f : A \to \mathbb{R}$ continu zijn. Toon aan dat $f(A)$ samenhangend is.

(2) Laat $f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ een polynoom zijn waarbij de coefficiënten c_0 en c_n verschillend teken hebben. Toon aan dat f een nulpunt op $\mathbb{R}$ bezit.

(3) Neem aan dat de functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differentieerbaar is met begrensde afgeleide. Toon aan dat de functie f gedefinieerd door

$$f(x) = x + \varepsilon g(x), \quad \varepsilon > 0,$$

injectief is als ε voldoende klein is.

(4) Definieer de functies f_n op $[0, 1]$ door

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1 - nx)^2}, \quad x \in [0, 1].$$

(a) Toon aan dat de rij (f_n) uniform begrensd is (i.e., $|f_n(x)| \leq M$ voor alle $x \in [0, 1]$ en alle $n \in \mathbb{N}$).
(b) Bepaal de puntsgewijze limiet van de rij f_n.
(c) Toon aan dat (f_n) geen deelrij bezit die uniform convergeert op $[0, 1]$.

(5) Toon aan dat de machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n (1 - x), \quad x \in [0, 1],$$

uniform convergeert op $[0, 1]$. Convergeert de reeks van absolute waarden ook uniform?

(6) Definieer the functie

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Is h differentieerbaar? En, zo ja, is de afgeleide h' continu?

(7) Toon aan dat de functie $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) = \sin 1/x, \quad x \neq 0; \quad f(0) = 7,$$

Riemann integreerbaar is over het interval $[-1, 1]$.